

## SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL PARA A APRENDIZAGEM DE PROBABILIDADE

Cileda de Queiroz e Silva Coutinho e Cristiane Candido Luz Caberlim  
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil  
cristianecanluz@yahoo.com.br

*A partir da hipótese de que a identificação de elementos do letramento probabilístico permite o estudo de como o conceito de probabilidade é construído, nos propomos a discuti-la a partir da identificação de tais elementos quando mobilizados em situação de resolução de problemas envolvendo simulação computacional. Estas situações envolvem também a articulação entre enfoque clássico e frequentista. Resultados de pesquisas na área apontam a importância desse tipo de simulação na construção desse conceito. Analisamos discursos e produções de alunos quando estes mobilizaram conhecimento probabilístico na resolução de problemas em contexto de probabilidade geométrica. Observamos que uma abordagem não equiprobabilista favorece o desenvolvimento do letramento probabilístico. Além disso, a articulação entre os enfoques clássico e frequentista permitiu a não observação do erro conceitual de assumir a frequência relativa de um evento como sua probabilidade, a partir de um número muito pequeno de repetições da experiência aleatória.*

### INTRODUÇÃO

O ensino e a aprendizagem da probabilidade são o foco principal da pesquisa aqui retratada. No Brasil ainda são poucas os estudos na área, sendo que os resultados nacionais e internacionais apontam para a necessidade de se considerar a simulação computacional como ferramenta a ser integrada nas situações de aprendizagem. Apontam também para a importância da articulação entre enfoques clássico e frequentista, sendo que o primeiro se refere à razão entre o número de sucessos e número total de casos quando o espaço amostral é equiprovável, e o segundo é aquele proposto por Bernoulli: o valor em torno do qual a série de frequências relativas acumuladas do evento se estabiliza (Coutinho, 2001).

Nosso objetivo é discutir a aprendizagem de probabilidade a partir da identificação de elementos do letramento probabilístico, mobilizados por alunos em situações de resolução de problemas envolvendo simulação computacional, no contexto da articulação entre estes dois enfoques. Tal discussão visa uma apreensão desse conceito para sua aplicação na leitura de diversos fenômenos e situações que compreendam a ação do acaso em seu desenvolvimento. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental (Brasil, 1998), encontramos uma indicação para que a principal finalidade do ensino de probabilidade é a compreensão da natureza aleatória de muitos acontecimentos cotidianos, com a percepção da possibilidade de identificação dos resultados possíveis.

A necessidade de compreensão da realidade é também reforçada nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, quando discute as ideias a serem trabalhadas na Matemática:

Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. (Brasil, 2000, p.40)

O documento completa que, sem perder seu caráter de ciência, a Matemática tem um caráter formativo ou instrumental que vai além das estratégias sofisticadas: deve propiciar o desenvolvimento da iniciativa e da segurança para promover sua adaptação sempre que necessário.

Nesse contexto, a apreensão do acaso, a identificação da experiência aleatória em jogo e a construção do conceito de probabilidade para sua mobilização na resolução de problemas que envolvam situações aleatórias é componente fundamental no desenvolvimento do aluno. Se faz

necessária, dessa forma, a concepção de situações de aprendizagem que favoreçam tal construção de conhecimento (e por consequência, o desenvolvimento do letramento), e situações com tais características foram estudadas em Coutinho (2001), as quais foram adaptadas e aplicadas na pesquisa desenvolvida por Caberlim (2015).

### O USO DO SOFTWARE CABRI-GÉOMÈTRE II E O LETRAMENTO PROBABILÍSTICO

As atividades a serem discutidas no presente trabalho se desenvolveram a partir do referencial construído em Coutinho (2001): uma proposta de ensino pela modelagem, na qual cabe ao aluno reconhecer uma configuração – no caso, a configuração de uma distribuição binomial. A fundamentação para a elaboração das atividades foi a Teoria das Situações Didáticas (Brousseau, 1986), buscando inserir os alunos na dialética de ação – formulação – validação que caracteriza uma situação adidática.

Trabalhou-se com a hipótese didática de que a associação entre Cabri II e uma planilha eletrônica (no nosso estudo, Excel) pode ser a base da construção de um *milieu* adidático muito rico para um aluno que se encontra em processo de resolução de problemas relativos à modelização de situações aleatórias simples apresentadas em contexto geométrico. Atribuímos esta riqueza à possibilidade de comparação entre o cálculo a priori de uma probabilidade (determinada pela razão entre áreas) e a estimação do valor desta probabilidade pela análise das frequências experimentais observadas (estabilização da série de frequências relativas acumuladas associadas ao evento estudado).

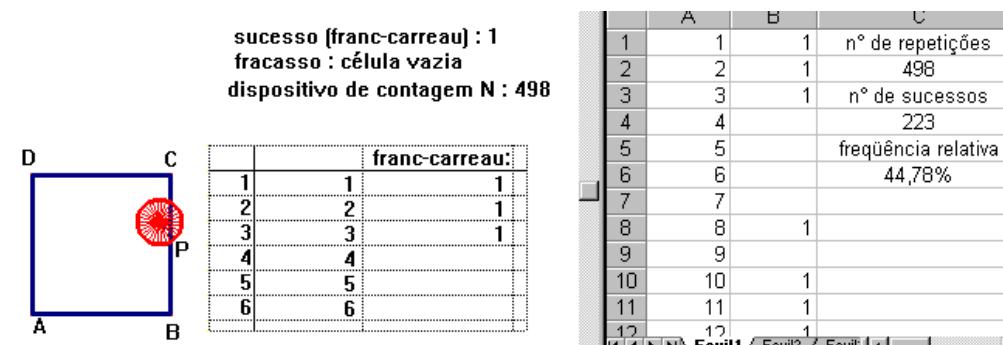


Figura 1. Elementos da simulação do jogo Franc-Carreau

Esta riqueza pode ser atribuída também à manipulação direta dos parâmetros da simulação pelos alunos, o que é uma característica do dispositivo construído no Cabri II (figura 1): os alunos poderiam modificar as dimensões das figuras em jogo. Nesta atividade, são elementos manipuláveis do Cabri II: a medida dos lados do quadrado ABDC e o raio do círculo de centro P.

O jogo Franc-Carreau: estudado pela primeira vez em 1733 por um naturalista e matemático francês, Georges-Louis Leclerc, o conde de Buffon. Ele consiste em lançar uma moeda em um piso de azulejos de forma quadrada. Os jogadores apostam na posição final de tal moeda: imobilizar-se-ia ela completamente sobre um único azulejo (posição chamada “*franc-carreau*”), sobre uma junta entre dois azulejos ou sobre mais juntas?

As atividades que construíram as condições didáticas para a mobilização dos elementos do letramento probabilístico foram desenvolvidas com manipulação de material concreto (pote de contas coloridas para um sorteio aleatório). Foram construídas a partir da articulação entre o enfoque clássico e o frequentista. Tomamos por letramento probabilístico o proposto por Gal (2005), para quem a expressão designa um processo que envolve um conhecimento mais aprofundado dos construtos teóricos da ciência em análise e de sua epistemologia:

O termo letramento tem sido tradicionalmente associado com o nível de habilidades de leitura e escrita que as pessoas necessitam para o mínimo funcionamento em sociedade. Por associação, o uso de “letramento” quando comparado com um termo denotando uma área de atividade humana (por exemplo, “letramento computacional”) pode provocar uma imagem do conjunto minimal de habilidades básicas esperadas para todos os cidadãos nessa área, se

opondo ao conjunto de habilidades mais avançadas que apenas algumas pessoas podem alcançar (GAL, 2005, p.41-42, tradução nossa).

No que se refere ao letramento probabilístico, buscamos identificar indícios de que o aluno:

- (a) identifique a existência de um protocolo experimental que permite a descrição completa das condições de realização do experimento, e conseqüentemente, sua reprodução nas mesmas condições (percepção da reprodutibilidade);
- (b) identifique o componente de imprevisibilidade pela impossibilidade de calcular ou de determinar previamente o resultado final do experimento.
- (c) identifique a possibilidade de descrever com precisão o conjunto de resultados possíveis do experimento partindo do protocolo experimental.

Estes três componentes do letramento foram identificados em Coutinho (2001), embora a autora os designasse como as condições para a construção do conceito de probabilidade.

## METODOLOGIA

A partir dos pressupostos teórico-metodológicos definidos, foi elaborada uma sequência de atividades, organizadas em três situações didáticas: Urna de Bernoulli, Urna de Pixels e Franc-Carreau. Os objetivos de cada uma delas são: proporcionar aos alunos elementos que permitam a identificação da configuração de uma Experiência de Bernoulli (experiência aleatória com dois resultados possíveis – sucesso ou fracasso); implementar o modelo de urna de Bernoulli em contexto geométrico; mobilizar os conhecimentos construídos nas atividades anteriores para resolver o problema proposto pelo jogo Franc-Carreau. Ressalta-se que a identificação dos elementos de letramento probabilístico foi particularmente trabalhada nessa última situação didática (Franc-Carreau).

A pesquisa consistiu em um estudo de caso: um grupo formado por seis alunos do terceiro ano do Ensino Médio de um Colégio da rede privada da cidade de São Paulo, Brasil, com participação voluntária. Destacamos que estes alunos já haviam estudado o conteúdo Probabilidade no ano anterior, ou seja, no segundo ano do Ensino Médio.

A identificação dos elementos do letramento probabilístico foi feita a partir da análise da produção dos alunos, buscando identificar termos e métodos utilizados para comunicar sobre chance (linguagem corrente utilizada para descrever as respostas, a qual foi sendo mais apropriada conforme o avanço das situações propostas).

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

A partir dos dados coletados e organizados em protocolos contendo diálogos e produção dos alunos, analisados à luz do proposto por Gal (2005) para letramento probabilístico, pudemos identificar alguns elementos que indicam o desenvolvimento desse letramento ao longo do desenrolar das situações didáticas.

No que se refere aos elementos designados como sendo da categoria “Grandes Ideias”, contemplando as ideias de variação, aleatoriedade, independência e previsibilidade, os alunos mobilizaram conhecimentos referentes à percepção da reprodutibilidade como elemento para distinção entre experimentos aleatórios (reprodutíveis) e experimentos contingentes (não reprodutíveis). Tal percepção foi desenvolvida ao longo das atividades que compunham as situações didáticas. Por exemplo, observamos que apenas a partir da questão 4 da atividade 2, Situação Didática Urna de Bernoulli, tal percepção pode ser inferida a partir dos diálogos e produções dos alunos, como segue. Citamos aqui os extratos referentes ao aluno AC.

*Questão 1, atividade 1: “Apresente 2 exemplos de situações que você já viveu ou observou, nas quais existem a ação do acaso. Descreva pelo menos uma situação que não seja um jogo de azar.”* Resposta do aluno: *cair da escada, carro quebrar na entrada de um túnel voltando da praia.*

*Questão 4, atividade 1: “Em que condições podemos dizer que uma situação aleatória foi reproduzida?”* Resposta do aluno: *quando a situação se repetir igualmente mais de uma vez.*

Na Situação B, apresentou-se aos alunos o dispositivo ao qual designamos por Urna de Pixels, no qual uma animação do número N permitia ao software Cabri-Géomètre II posicionar um ponto

aleatoriamente no interior do retângulo ABCD. Estabeleceu-se que o resultado a ser associado com “sucesso”, em analogia à Urna de Bernoulli, seria “o ponto encontra-se no interior do retângulo AEFD, conforme ilustra a figura 2.

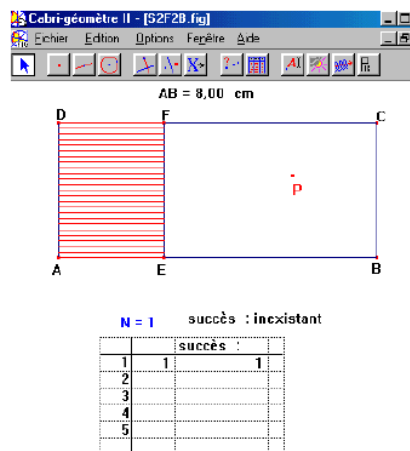


Figura 2. Apresentação da Urna de Pixels – assimilação do ponto por um pixel

Nesta situação B, organizada em duas atividades B1 e B2, a questão 3b da atividade B2 solicitava: *b) Admitindo que as contas vermelhas representam o sucesso, que urna de Bernoulli você poderia propor para representar o experimento aleatório « Sortear um pixel P ao acaso no retângulo ABCD »? Justifique.* Nesta atividade os alunos realizavam a simulação com 1000 repetições e os resultados eram transportados para uma tabela Excel de forma a facilitar a percepção da estabilização das frequências acumuladas. A resposta de um aluno é apresentada na figura 3.

b) Total de contas vermelhas: 385  
Total de contas: 1000

Sim, pois o número de contas vermelhas no outro experimento era menor que o de azuis assim como nesse experimento a área vermelha (azul no caso) era menor que a azul (branca).

$$\frac{\text{Área}}{\text{Segmento}} = \frac{\text{Área 2}}{\text{Segmento 2}}$$

Figura 3. Resposta do aluno G

Observa-se que a produção desse aluno nessa questão, juntamente com a análise das resoluções propostas para as demais questões, nos permite inferir que ele assimila a experiência aleatória Urna de Bernoulli à experiência com a Urna de Pixels. Ou seja, ele mobiliza elementos que indicam letramento probabilístico pelo reconhecimento da experiência aleatória, da ideia de variabilidade no desenvolvimento dessa experiência, da percepção da independência dos eventos (resultados das repetições da experiência).

Na situação didática C, “Franc Carreau” as produções dos alunos nos permitiram confirmar a presença dos elementos do letramento probabilístico citados. Questão 1, situação C: *É possível representar esse jogo (Franc-Carreau) por uma urna de Bernoulli? Se sim, qual sua composição? Se não, justifique.* Resposta do aluno AC: *Sim. A composição seria: se numa urna saísse vermelho, por exemplo, seria sucesso, assim como o ladrilho, caso saísse azul seria fracasso, como quando cai nos rejuntas.*

No que se refere aos elementos do letramento probabilístico relacionados aos elementos de conhecimento e com as maneiras de encontrar ou estimar a probabilidade de eventos, citamos a resposta observada na última questão da sequência didática: (apresentou-se, juntamente com o enunciado, tabela e gráfico com as frequências acumuladas de 3000 repetições do lançamento de uma moeda nas condições do jogo Franc Carreau). *Suponha que foram efetuadas 3000 simulações com o Cabri. Quantas bolinhas existem no pote (Urna de Bernoulli)? Destas quantas são vermelhas (representam o sucesso)? Existe outra Urna de Bernoulli que represente esta experiência aleatória? Justifique.* Resposta de AC: *Existem 3000 bolinhas. O sucesso dependerá da quantidade de vermelhas e azuis, se houver mais vermelhas é mais provável que tenha mais*

*sucesso, supondo isso poderiam sair 1800 bolinhas. Qualquer meio que houvesse uma proporção igual e fosse utilizar de forma aleatória serviria.*

Em resumo, observou-se que uma abordagem que não teve como ponto de partida situações de equiprobabilidade favoreceu o desenvolvimento do letramento probabilístico dos alunos. Pela utilização da simulação, realizada com o software Cabri-Géomètre II em associação com uma planilha eletrônica, o aluno pode identificar a necessidade de um número razoavelmente grande de repetições do experimento “lançar uma moeda ao acaso e observar a posição na qual se imobiliza no azulejo” a partir da observação de diversas situações produzidas: de 30 a 3000 repetições, gerando uma série representada graficamente com auxílio da planilha eletrônica.

Dependendo do grau de conhecimento deste software, os alunos podem aumentar os elementos para validação de suas conjecturas e de sua solução pela modificação, por exemplo, das dimensões das figuras apresentadas na tela. Eles podem assim tomar decisões para as estratégias adequadas para a resolução do problema proposto, decisões estas que são fundamentadas sobre conhecimentos teóricos e não sobre uma apreensão perceptiva de uma imagem apresentada na tela do computador.

#### REFERÊNCIAS

- Brasil. (1998). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais – Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental – Matemática*. Brasília: MEC. Recuperado de <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Consultado em 15/08/2014.
- Brasil. (2000). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais Para o Ensino Médio – Matemática*. Brasília: MEC. Recuperado de <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Consultado em 15/08/2014.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. In *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7/2, 33-115.
- Caberlim, C.C.L. (2015). *Letramento Probabilístico no Ensino Médio: um estudo de invariantes operatórios mobilizados por alunos*. Dissertação de Mestrado (mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- Coutinho, C. Q. S. (2001). *Introduction aux Situations Aléatoires dès le Collège: de la modélisation à la simulation d’expériences de Bernoulli dans l’environnement informatique Cabri-Géomètre II*. Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- Gal, I. (2005). Towards "Probability Literacy" for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. In Graham A. Jones (Ed.). *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*. New York: Springer Science + Business Media.